1.6) $A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix}$, $A_2 = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$, $A_3 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$

a) Compruebo que $B \in$ gen $\{A_1, A_2, A_3\}$

Para que pertenezca, B se tiene que poder escribir como una cl de $\{A_1, A_2, A_3\}$:

$$B = \alpha_1 . A_1 + \alpha_2 . A_2 + \alpha_3 . A_3 \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & -\alpha_2 \\ -\alpha_2 & \alpha_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_3 & 0 \\ -\alpha_3 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$$

$$\rightarrow \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 & \alpha_1 - \alpha_2 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 - \alpha_3 & -\alpha_1 + \alpha_2 \end{bmatrix}$$

Ecuaciones

$$\begin{cases} \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2 \\ \alpha_1-\alpha_2=-1 \\ -\alpha_1-\alpha_2-\alpha_3=-2 \\ -\alpha_1+\alpha_2=1 \end{cases}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 & -1 \\ -1 & -1 & -1 & -2 \\ -1 & 1 & 0 & 1 \end{array}\right) \begin{array}{l} F2 \to F1-F2 \\ F3 \to F1+F3 \\ F4 \to F1+F4 \end{array} \quad \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) F3 \to F2-F3$$

$$\to \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \to \alpha_1+\alpha_2+\alpha_3=2 \to \alpha_1+\frac{3}{2}-\frac{\alpha_3}{2}+\alpha_3=2 \; (*) \\ \to 2\alpha_2+\alpha_3=3 \to \alpha_2=\dfrac{3-\alpha_3}{2} \end{array}$$

$$(*) \to \alpha_1+\frac{\alpha_3}{2}=\frac{1}{2} \to \alpha_1=\frac{1-\alpha_3}{2}$$

Entonces $\bar{X}$ que cumpla será: $(\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3)=\left(\dfrac{1-\alpha_3}{2};\dfrac{3-\alpha_3}{2};\alpha_3\right)$

Con lo cual tiene infinitas soluciones $\to B \in gen\{A_1, A_2, A_3\}$

Busco 3 formas:

Con $\alpha_3 = 0 \to (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{1}{2}; \frac{3}{2}; 0\right)$

$\to B = \frac{A_1}{2} + \frac{3A_2}{2}$ (1)

$\to$ con $\alpha_3 = -1 \to (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (1; 2; -1)$

$\to B = A_1 + 2A_2 - A_3$ (2)

$\to$ con $\alpha_3 = 1 \to (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (0; 1; 1)$

$\to B = A_2 + A_3$ (3)

b) La solución que encontré para a) se puede escribir como

$$S = S_{PARTICULAR} + S_{HOMOGENEA}$$

$\rightarrow$ Era $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = \left(\frac{1}{2} - \frac{\alpha_3}{2} ; \frac{3}{2} - \frac{\alpha_3}{2} ; \alpha_3\right)$, que puedo ponerlo

como: $\underbrace{\alpha_3 \cdot \left(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; 1\right)}_{S_{HOMOGENEA}} + \underbrace{\left(\frac{1}{2} ; \frac{3}{2} ; 0\right)}_{S_{PARTICULAR}}$

Por lo tanto un sist. generador ~~de la~~ del subespacio que me dan es: $\langle\left(-\frac{1}{2} ; -\frac{1}{2} ; 1\right)\rangle$ ya que la ecuación que me dan es el sistema homogeneo asociado del anterior que planteé en a).

c) $A_1 = \alpha_1 . A_2 + \alpha_2 . A_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & -\alpha_1 \\ -\alpha_1 & \alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \rightarrow -1 + \alpha_2 = 1 \rightarrow \underline{\alpha_2 = 2} \\ -\alpha_1 = 1 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = -1 \rightarrow -(-1) - 2 = -1 \rightarrow -1 = -1 \checkmark \\ \underline{\alpha_1 = -1} \end{cases}$$

$$\boxed{A_1 = -A_2 + 2A_3}$$

$A_2 = \alpha_1 . A_1 + \alpha_2 . A_3 \rightarrow \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_1 & \alpha_1 \\ -\alpha_1 & -\alpha_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \alpha_2 & 0 \\ -\alpha_2 & 0 \end{bmatrix} \rightarrow$

$$\rightarrow \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \rightarrow -1 + \alpha_2 = 1 \rightarrow \underline{\alpha_2 = 2} \\ \underline{\alpha_1 = -1} \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = -1 \rightarrow 1 - 2 = -1 \checkmark \\ -\alpha_1 = 1 \end{cases}$$

$$\boxed{A_2 = -A_1 + 2A_3}$$

$$A_3 = \alpha_1 . A_1 + \alpha_2 . A_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \alpha_1 . \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} + \alpha_2 . \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \to$$

$$\to \begin{cases} \alpha_1 + \alpha_2 = 1 \to 2\alpha_1 = 1 \to \alpha_1 = 1/2 \\ \alpha_1 - \alpha_2 = 0 \to \alpha_1 = \alpha_2 \to \alpha_2 = 1/2 \\ -\alpha_1 - \alpha_2 = -1 \to -1/2 - 1/2 = -1 \to -1 = -1 \checkmark \\ -\alpha_1 + \alpha_2 = 0 \to -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \to 0 = 0 \checkmark \end{cases}$$

$$\boxed{A_3 = \frac{A_1}{2} + \frac{A_2}{2}}$$

d) Verificar $\{0\} \subsetneq gen\{A_i\} \subsetneq gen\{A_i, A_j\} = gen\{A_1, A_2, A_3\}$

- Efectivamente si tengo solo $gen\{A_i\}$, si planteo un vector igualado a una CL del generador:

  $v = \alpha . A_i \to$ con $\alpha = 0 \to v = 0$ y efectivamente $\{0\} \subsetneq gen\{A_i\}$

- Ahora si tengo $gen\{A_i, A_j\}$ y planteo la CL:

  $v = \alpha_1 . A_i + \alpha_2 . A_j \to$ ~~con $\alpha_1 = \lambda$ y $\alpha_2 = 0 \to v = \lambda A_i$ y por lo~~

  ~~tanto $A_i \subsetneq gen\{A_i, A_j\} \to gen\{A_i\} \subsetneq gen\{A_i, A_j\}$~~

- ~~Además~~ ~~También~~ con $\alpha_1 = \lambda$ y $\alpha_2 = 0 \to \lambda . A_i = gen\{A_i\}$ entonces $gen\{A_i\} \subsetneq gen\{A_i, A_j\}$

- Como cada A_i con $1 \leq i \leq 3$ puede ponerse como CL de las otras dos (punto c)) quiere decir que uno "sobra" en el generador siempre y por lo tanto $gen\{A_i, A_j\} = gen\{A_1, A_2, A_3\}$